Faculté des Sciences et Techniques
Tanger

Année 2005-6
M143

Controle N°:1

Exercice 1: Déterminer les extremums, s'ils existent, des fonctions suivantes

a) $f(x,y) = y^2 + 4xy - 2x^2 - 1$.

b) $g(x,y) = x^3 - y^3$

et discuter leurs nature.

Exercice 2: Soit f une fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x}\sin(x^2+y^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Est ce que f admet une limite à l'origine suivant toutes les directions?

b) Est ce que la fonction f admet une limite à l'origine?

Exercice 3: Soit f une fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

a) Est ce que f est continue sur IR^2?

b) Calculer les dérivées partielles de f, si elles existent,

a-i) aux points $(x,y) \neq (0,1)$.

a-ii) au point $(0,1)$.

c) Est ce que f est différentiable?

c-i) aux points $(x,y) \neq (0,1)$.

c-ii) au point $(0,1)$.

Exercice 4: Soit f une fonction définie par $f(x,y) = x^2 + xy - 1$.

fct. implicite

a) Montrer que f définit une fonction implicite ϕ au voisinage du point $(1,0)$.

b) Calculer $\phi(1), \phi'(1), \phi''(1)$ et $\phi'''(1)$.

c) Déterminer le développement limité de ϕ au voisinage de 1 à l'ordre 3.

Institut la centrale CC1 05-06

Exo1 a/ $f(x,y) = y^2 + 4xy - 2x^2 - 1$

* Points critiques : condition d'existence $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$\begin{cases} 4y - 4x = 0 \\ 2y + 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ le seul point critique est $(0,0)$

* $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4$ $\quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$; $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$

on a $rt - s^2 = -8 - 16 = -24 < 0$ donc f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$

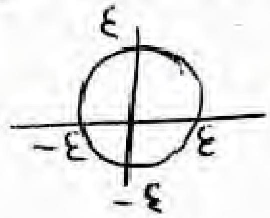
b/ $g(x,y) = x^3 - y^3$

* Points critiques : $\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2$ $\quad \frac{\partial g}{\partial y} = -3y^2$

$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ le point critique est $(0,0)$

$r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 6x$, $s = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0$, $t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -6y$

$r(0,0) = 0$, $s(0,0) = 0$ $\quad t(0,0) = 0$, $rt - s^2 = 0$ donc on ne peux pas conclure (on revient à la definition)



Soit $B((0,0) ; r = \varepsilon)$ un voisinage de $(0,0)$ avec $\varepsilon > 0$

Considerons $A\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$; $f\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right) = \frac{\varepsilon^3}{8} - \frac{\varepsilon^3}{64} = \frac{7\varepsilon^3}{64} > 0$

donc $f(0,0) = 0$ n'est pas un minimum

Considerons $B\left(-\frac{\varepsilon}{2}, -\frac{\varepsilon}{4}\right)$ $f\left(-\frac{\varepsilon}{2}, -\frac{\varepsilon}{4}\right) = -\frac{\varepsilon^3}{8} + \frac{\varepsilon^3}{64} = -\frac{7\varepsilon^2}{64} < 0$

donc $f(0,0) = 0$ n'est pas un maximum

Exercice 2 $\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x} \sin(x^2 + y^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

a/ $f(t(x,y) + 0,0)) = f(tx, ty) = \frac{ty}{tx} \sin(t^2x^2 + t^2y^2) = \frac{y}{x} \sin t^2(x^2+y^2)$

$= \frac{y}{x} \frac{\sin t^2(x^2+y^2)}{t^2(x^2+y^2)} \cdot t^2(x^2+y^2)$ $\quad \lim_{t \to 0} f(tx, ty) = \frac{y}{x} \times 1 \times 0 = 0$

donc f admet une limite suivant toutes les directions

b/ Pour $y = x$ on a $\lim_{x \to 0} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \sin(2x^2) = 0$

Pour $x = y^3$ on a $\lim_{x \to 0} (x,y) = \lim_{y \to 0} \frac{y \sin(y^6 + y^2)}{y^3} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(y^2 + y^6)}{y^2 + y^6} \cdot \frac{y^2 + y^6}{y^2}$

$= \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin(y^2+y^6)}{y^2+y^6}(1+y^4) = 1 \times 1 = 1$ donc la limite n'existe pas.

Exercice 3 $\quad f(x,y) = \frac{x(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} \quad (x,y) \neq (0,1) \quad ; f(0,1) = 0$

a/ • $(x,y) \xrightarrow{f_1} x(y-1)$ et $(x,y) \xrightarrow{f_2} \sqrt{x^2+(y-1)^2}$ sont cont sur $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,1)\}$ car $x^2+(y-1)^2 > 0$ sur D donc $f = \frac{f_1}{f_2}$ est continue sur D

• Continuité en $(0,1)$

posons $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y-1 = r\sin\theta \end{cases}$ alors $|f(x,y)| = \left|\frac{r\cos\theta \, r\sin\theta}{r}\right| = r\,|\cos\theta|\,|\sin\theta| \leq r$

$\lim\limits_{r \to 0} r = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 0 = f(0,1)$

donc f est cont en $(0,1)$

b/ ai/ $x \longmapsto f(x,y)$ et $y \to f(x,y)$ sont dérivables sur D et

$\forall (x,y) \in D$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left((xy-x)(x^2+(y-1)^2)^{-1/2}\right) = \frac{(y-1)^3}{(\sqrt{x^2+(y-1)^2})^3}$

et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3-2xy}{(\sqrt{x^2+(y-1)^2})^3}$

aii/ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x,1)-f(0,1)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{0-0}{x} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim\limits_{y \to 1} \frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{0-0}{0} = 0$

c/ ci/ $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D car $(x,y) \xrightarrow{f_1} (y-1)^3$ et $(x,y) \xrightarrow{f_2} x^3-2xy$ et $(x,y) \xrightarrow{f_3} (\sqrt{x^2+(y-1)^2})^3$ sont continues sur D et $\forall (x,y) \in D$: et $f_3 \neq 0$ et $f_3 > 0$

cii/ Si f est differentiable en $(0,1)$ alors

$df_{(0,1)}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) \times x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \times y = 0$

et $\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,1) - df_{(0,1)}(x,y)}{\|(x,y-1)\|} = \frac{x(y-1)}{(\sqrt{x^2+(y-1)^2})^2} = \frac{x(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$

Pour $x = y-1$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \varepsilon(x,y) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = 1/2$

Pour $x = (y-1)^2$: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \varepsilon(x,y) = \lim\limits_{y \to 1} \frac{(y-1)^3}{(y-1)^4+(y-1)^2} = \lim\limits_{y \to 1} \frac{y-1}{(y-1)^2+1} = 0$

donc $\lim\limits_{(0,1)} \varepsilon(x,y)$ n'existe pas donc f n'est pas diff en $(0,1)$